CLEAI, matematica generale: esercizi svolti

Studio di funzione

Disegnare il grafico della seguente funzione (la derivata seconda è facoltativa):

$$f(x) := \begin{cases} x^{-2}e^{2x} & \text{se} \quad x \leq 2 \\ x^5 - 5x - 1 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

Evidenziare in particolare i seguenti punti: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) punti in cui f è sicuramente continua, punti in cui f è sicuramente derivabile; (c) punti di discontinuità; (d) limiti; (e) asintoti; (f) monotonia; (g) punti di non derivabilità; (h) tangenti destra e sinistra in $x = 2$.

Svolgimento

Chiamiamo per comodità $f_1(x) = x^{-2}e^{2x}$ e $f_2(x) = x^5 - 5x - 1$.

(a) $\mathrm{CE} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $\mathrm{CE}' = [-\infty, +\infty]$.

(b) Poiché f_1 e f_2 sono funzioni continue e derivabili nei loro campi di esistenza, f è sicuramente continua e derivabile in $\mathrm{D} = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$.

(c) Eventuali discontinuità vanno studiate in $\mathrm{CE} - \mathrm{D} = \{2\}$:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f_1(x) = \lim_{x\to 2^-} x^{-2}e^{2x} = e^4/4$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f_2(x) = \lim_{x\to 2^+} x^5 - 5x - 1 = 32 - 10 - 1 = 21$$

Poiché i limiti destro e sinistro sono diversi, se ne conclude che in 2 NON ESISTE il limite, e dunque f NON è continua in 2.

(d) I limiti vanno fatti in $\mathrm{CE}' - \mathrm{D} = \{-\infty, 0, 2, +\infty\}$. Il limite in 2 è già stato fatto.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f_1(x) = \lim_{x\to -\infty} x^{-2}e^{2x} = 0/\infty = 0$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f_1(x) = \lim_{x\to 0} x^{-2}e^{2x} = 1/0^+ = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f_2(x) = \lim_{x\to +\infty} x^5 - 5x - 1 = \lim_{x\to +\infty} x^5(1 - 5/x^4 - 1/x^5) = +\infty(1 - 0 - 0) = +\infty$$

(e) Visti i limiti fatti al punto precedente, possiamo dedurre che $x = 0$ è un asintoto verticale e $y = 0$ è un asintoto orizzontale verso $-\infty$. Rimane la possibilità che ci sia un asintoto obliquo verso $+\infty$:

$$\begin{aligned} m = \lim_{x\to +\infty} f(x)/x &= \lim_{x\to +\infty} f_2(x)/x \\ &= \lim_{x\to +\infty} x^4(1 - 5/x^4 - 1/x^5) = +\infty(1 - 0 - 0) = +\infty \end{aligned}$$

dunque NON c'è asintoto obliquo verso $+\infty$.

(f) La monotonia è data dal segno della derivata prima (vedi figura 1).

$$f'(x) := \begin{cases} (2e^{2x}x^2 - 2e^{2x}x)/x^4 & \text{se} \quad x < 2 \\ 5x^4 - 5 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases} = \begin{cases} 2e^{2x}(x-1)/x^3 & \text{se} \quad x < 2 \\ 5x^4 - 5 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

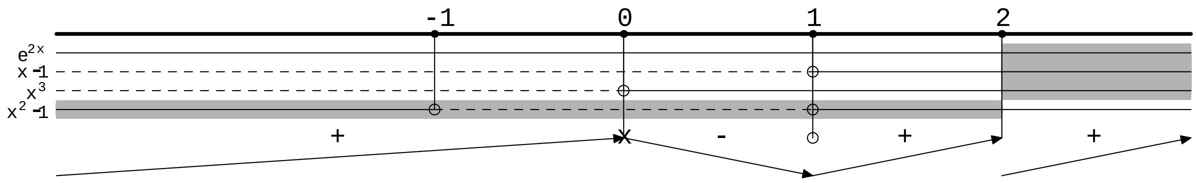

Figura 1: Segno di f': le bande grigie indicano parti cancellate

(g) Eventuali punti di non derivabilità vanno cercati in CE $-$ D $= \{2\}$. In questo caso, poiché f non è continua in 2, la derivata in 2 NON esiste.

(h) I coefficienti angolari delle tangenti destra e sinistra in 2 sono dati rispettivamente dai limiti destro e sinistro di f' in 2:

$$\begin{aligned} m^- &= \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} 2e^{2x}(x-1)/x^3 = e^4/4 \\ m^+ &= \lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} 5x^4 - 5 = 75 \end{aligned}$$

La tangente sinistra passa per il punto $(2, \lim_{x\to 2^-} f(x)) = (2, e^4/4)$, la tangente destra passa per il punto $(2, \lim_{x\to 2^+} f(x)) = (2, 21)$. Otteniamo:

$$\begin{aligned} \text{tangente sinistra: } & y - e^4/4 = m^-(x-2) \Rightarrow 4y - e^4 = e^4(x-2); \\ \text{tangente destra: } & y - 21 = m^+(x-2) \Rightarrow y - 21 = 75(x-2). \end{aligned}$$

Collazionando tutte le suddette informazioni, si ottiene il seguente grafico per f. Notare che il grafico è ottenuto per incollamento dei grafici di f_1 e f_2, quindi se il grafico di f_2 fosse noto a priori, si potrebbe studiare solo f_1 (se ad esempio avessimo avuto $f_2 = \ln$ avremmo potuto sfruttare il grafico di ln, che DOBBIAMO imparare a memoria).

Notare che per disegnare il grafico in figura 2 abbiamo dovuto fare le seguenti considerazioni:

- $e^4/4 < 21$: questi valori sono stati calcolati nel punto (c);
- $f(1) = f_1(1) = e^2$: il punto $(1, e^2)$ è un punto di minimo, come risulta dal segno di f' in figura 1 (può essere utile, come ulteriore controllo di correttezza dei calcoli, verificare che $e^2 < e^4/4$);
- $e^4/4 < 75$: questi valori sono stati calcolati nel punto (f) (dunque la tangente sinistra va disegnata MENO inclinata della tangente destra).

Infine, osserviamo che non avendo fatto la derivata seconda, non abbiamo alcuna garanzia che la concavità sia come in figura 2.

Studio di grafico di funzione

Data $f(x)$ tramite il grafico in figura 3, determinare: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) zeri; (c) intersezioni con gli assi; (d) segno; (e) punti di discontinuità; (f) limiti; (g) asintoti; (h) punti e valori critici; (i) monotonia; (j) estremi locali e globali; (k) punti di non derivabilità.

Svolgimento

(a) Assumendo che il cerchietto sul grafico di funzione indichi l'esclusione del punto, otteniamo CE $= (-\infty, 1) \cup (1, 4)$, CE$' = [-\infty, 4]$.

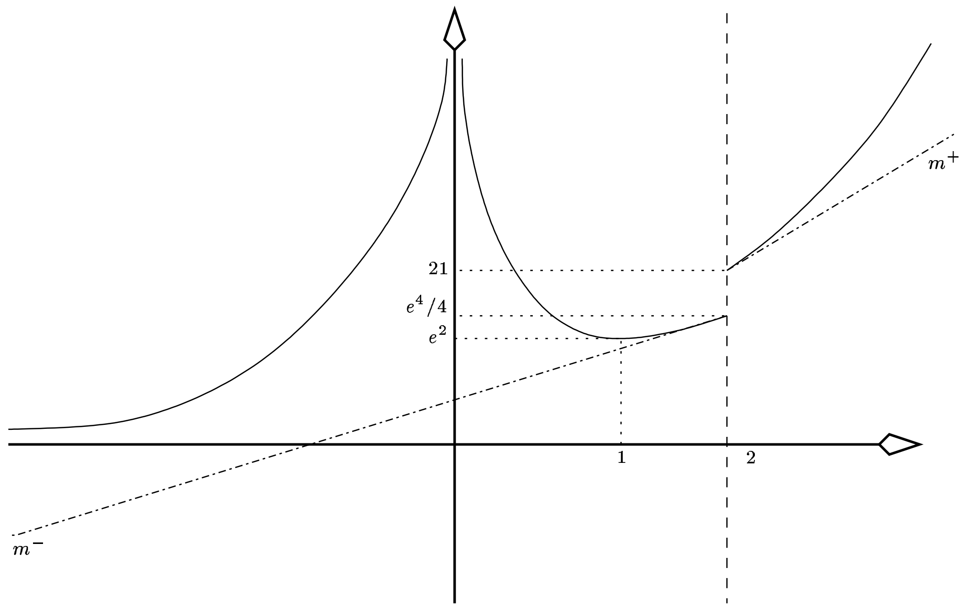

Figura 2: Grafico di f

(b) Gli zeri sono le ascisse delle intersezioni con l'asse x, cioé $\{3\}$.

(c) C'è un'unica intersezione con l'asse x, il punto $(3, 0)$, ed un'unica intersezione con l'asse y,il punto $(0, 1)$.

(d) Il segno è dato dalla figura 4.

(e) Le discontinuità vanno cercate nel campo di esistenza della funzione, e graficamente corrispondono a "salti" nel grafico. Nel nostro caso, la funzione non ha alcun salto nel CE, e dunque NON ci sono discontinuità. Attenzione che se non ci fosse stato il cerchietto in 1, cioé se la funzione fosse stata definita anche in 1, avremmo invece avuto una discontinuità.

(f) I limiti importanti sono quelli in $\mathrm{CE}' - \mathrm{CE} = \{-\infty, 1, 4^-\}$. Passeggiando sul grafico e guardando l'asse y durante la passeggiata, otteniamo:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 1$$
$$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to4^-} f(x) = -\infty$$

(g) $y = 0$ è asintoto orizzontale verso $-\infty$, $x = 1$ è asintoto verticale da destra verso $+\infty$, $x = 4$ è asintoto verticale da sinistra verso $-\infty$.

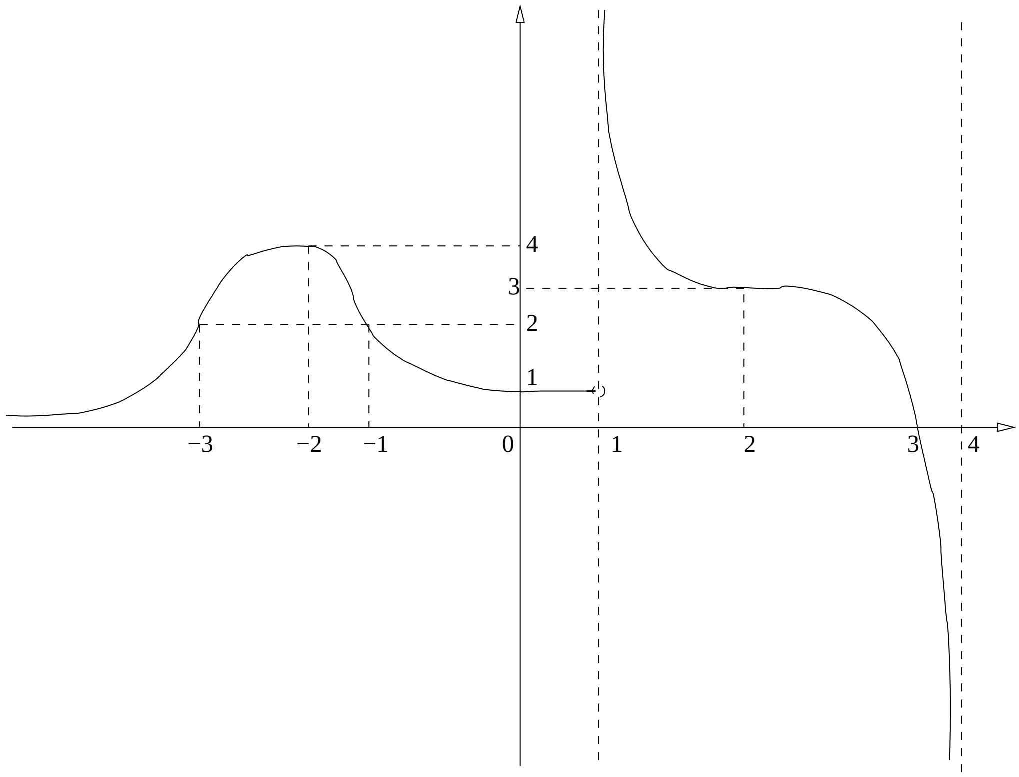

Figura 3: Da questo grafico, dedurre proprietà della funzione

(h) I punti critici sono i punti in cui la tangente è orizzontale (cioé i punti in cui la derivata è zero), e sono $(-2, 4)$ e $(2, 3)$. Si usa la terminologia "punto critico" anche per le ascisse di questi punti, mentre i valori critici sono le loro ordinate.

(i) La monotonia è data dalla figura 5.

(j) La funzione è derivabile in tutto il suo campo d'esistenza.

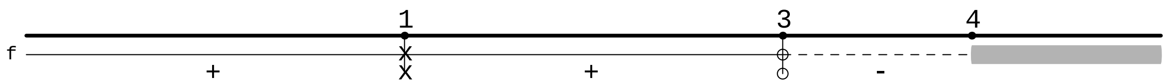

Figura 4: Segno della funzione data dal grafico in figura 3

Massimi e minimi

Determinare i punti e i valori di minimo e massimo (locali e globali) sull'intervallo $(-1, 1]$ della seguente funzione:

$$f(x) := 3x^{-1} + 2(x-1)^2$$

Svolgimento

Dobbiamo fare uno studio di massima della funzione nell'intervallo richiesto.

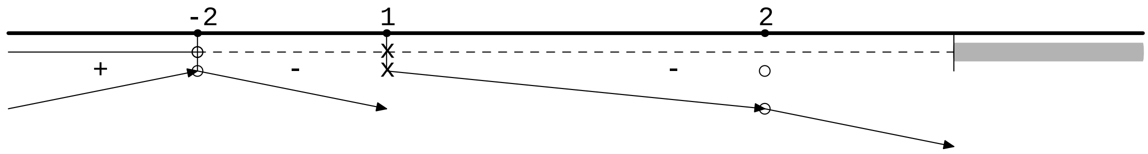

Figura 5: Monotonia della funzione data dal grafico in figura 3

La funzione non è definita in 0, dunque dobbiamo fare i limiti in $\{-1^+, 0, 1^-\}$:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 5$$
$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$$

La derivata viene:

$$f'(x) = -3x^{-2} + 4(x-1) = \frac{4x^3 - 4x^2 - 3}{x^2}$$

e dobbiamo studiarne il segno. Poiché il denominatore x^2 è positivo, rimane da studiare il segno di $g(x) = 4x^3 - 4x^2 - 3$.

Purtroppo Ruffini non ci aiuta: infatti nessuno tra $\{\pm 1, \pm 1/2, \pm 1/4, \pm 3, \pm 3/2, \pm 3/4\}$ annullano g.

Proviamo a studiare sommariamente g il grafico di g nell'intervallo $(-1, 1]$. La derivata viene $g'(x) = 12x^2 - 8x = 4x(3x-2)$, e dunque sappiamo studiarne il segno: risulta che g cresce tra -1 e 0, decresce tra 0 e 2/3 e ancora cresce tra 2/3 e 1. Ma poiché $g(-1) = -11$, $g(0) = -3$ e $g(1) = -3$, possiamo concludere che g è negativa in $(-1, 1]$.

Dunque $f'(x) = g(x)/x^2$ è sempre negativa in $(-1, 1]$, per cui la nostra funzione f è decrescente. Visti poi i limiti in $\{-1^+, 0, 1^-\}$, possiamo concludere che l'unico estremo è il punto $(1, 3)$, che risulta un minimo locale.

Zeri

Stabilire se $f(x) := e^x + \ln(x^2)$ ammette degli zeri su $(0, +\infty)$. In caso affermativo, dire quanti sono gli zeri e stimarli con precisione di almeno un'unità.

Svolgimento

Studio sommario di f.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$f'(x) = e^x + 2x/x^2 = e^x + 2/x$$

Notiamo che nell'intervallo richiesto $(0, +\infty)$ abbiamo $f'(x) > 0$, e dunque f è crescente.

Quindi ne deduciamo che esiste uno e un solo zero per f. Calcolando $f(1) = e > 0$ possiamo anche dire che tale zero si trova nell'intervallo $(0, 1)$.

Punti fissi

Stabilire se la curva $f(x) := -e^x - 1$ e la retta $y = x$ si intersecano. In caso affermativo, dire quanti sono i punti di intersezione e stimarne le ascisse con precisione di almeno un'unità. Infine, discutere i punti fissi di $f(x) := -e^x - 1$.

Svolgimento

Il problema è equivalente a trovare gli zeri di $F(x) = e^x + x + 1$, e si risolve come l'esercizio precedente.

Teorico

Dire se $f(x) := 7e^{\sqrt{|x^{123}-x^5+157|}}$ ammette un punto critico nell'intervallo $[0,1]$ (giustificare la risposta).

Svolgimento

Le funzioni x^{123}, x^5, 157 sono continue in $[0,1]$. La funzione $|x|$ è continua su $\mathbb{R}$, dunque $|x^{123} - x^5 + 157|$ è continua su $[0,1]$. La funzione $\sqrt{x}$ è continua in $[0, +\infty)$, dunque dobbiamo verificare che $|x^{123} - x^5 + 157|$ sia positivo. Lo è.

Dunque $\sqrt{|x^{123} - x^5 + 157|}$ è continua su $[0,1]$. Infine, poiché $7e^x$ è continua su $\mathbb{R}$, otteniamo che f è continua su $[0,1]$.

Per quanto riguarda la derivabilità, l'unico punto problematico è 0 per $|x|$. Ma nell'intervallo $(0,1)$ $x^{123} - x^5$ non può essere minore di -1, e dunque $x^{123} - x^5 + 157$ sarà maggiore di 156.

Quindi f è derivabile in $(0,1)$.

Poiché $f(0) = f(1)$, non rimane altro da fare che applicare il teorema del valor medio per dedurre che esiste almeno un punto $c \in (0,1)$ con $f'(c) = 0$ o, detto in altre parole, un punto critico.